

RÉGRESSION PSEUDO- ORTHOGONALE APPLIQUÉE À LA FORESTERIE

PSEUDO-ORTHOGONAL REGRESSION APPLIED TO FORESTRY

Chhun Huor UNG

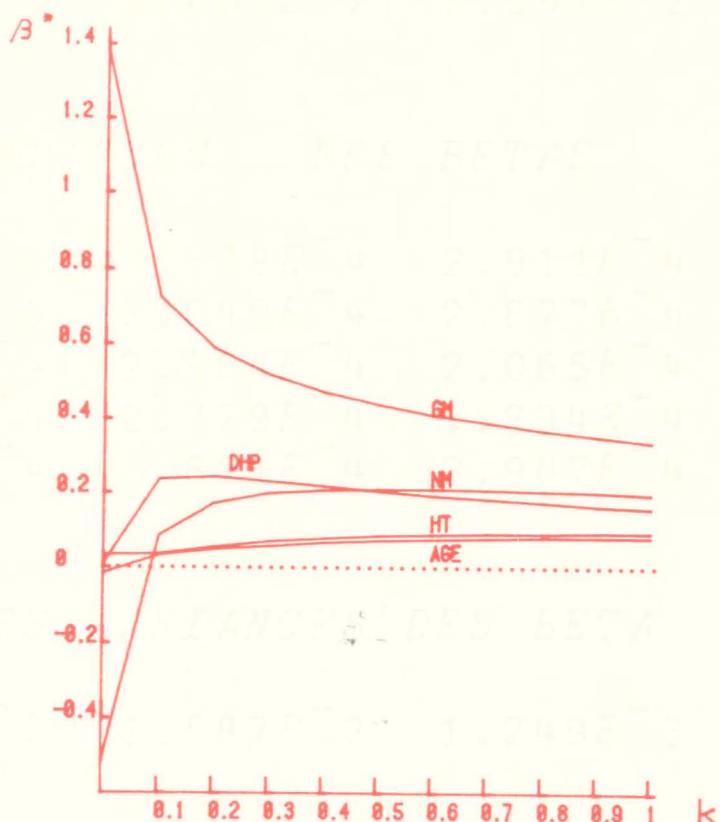


Figure 1. Variations de $\hat{\beta}^*$ en fonction de k (données centrées, réduites)

CENTRE DE RECHERCHES FORESTIÈRES DES LAURENTIDES

LAURENTIAN FOREST RESEARCH CENTRE



Environnement
Canada

Environment
Canada

Service
des forêts

Forestry
Service

REGRESSION PSEUDO-ORTHOGONALE APPLIQUEE A
LA FORESTERIE

PSEUDO-ORTHOGONAL REGRESSION APPLIED
TO FORESTRY

Chhun Huor UNG

LAU-X-34

DECEMBRE 1978

DECEMBER 1978

CENTRE DE RECHERCHES FORESTIERES DES LAURENTIDES
SERVICE CANADIEN DES FORETS
MINISTÈRE DE L'ENVIRONNEMENT
1080 ROUTE DU VALLON
SAINTE-FOY, QUÉBEC
G1V 4C7

RESUME

En régression multiple linéaire, lorsque les variables explicatives sont fortement corrélées, les coefficients obtenus par les moindres carrés deviennent instables. La (ridge) régression pseudo-orthogonale est une méthode qui permet d'obtenir, lorsqu'il y a multicollinearité, des coefficients de régression stables quoique biaisés. Cette méthode est brièvement décrite et un programme APL de calcul des coefficients est présenté.

Mots-clés: Multicollinearité, régression multiple, (ridge) régression pseudo-orthogonale, programme d'ordinateur.

ABSTRACT

In multiple linear regression, when the prediction variables are not orthogonal, the least squares estimates of the regression coefficients become unstable. The pseudo-orthogonal (ridge) regression is a statistical technique that gives stable regression coefficients even though they are biased. The technique is briefly described and an APL program for calculating the regression coefficients is presented.

Key-words: multicollinearity, multiple regression, pseudo-orthogonal (ridge) regression, computer program.

TABLE DES MATIERES

TABLE OF CONTENTS

	PAGE	
RESUME	ABSTRACT	1
INTRODUCTION	INTRODUCTION	2
(RIDGE) REGRESSION PSEUDO-ORTHOGONALE	PSEUDO-ORTHOGONAL (RIDGE) REGRESSION	3
PROGRAMME APL DE LA (RIDGE) REGRESSION PSEUDO-ORTHOGONALE	APL PROGRAM FOR PSEUDO-ORTHOGONAL (RIDGE) REGRESSION	6
EXEMPLE D'UTILISATION DU PROGRAMME	EXAMPLE OF THE USE OF THE PROGRAM	10
CONCLUSIONS	CONCLUSIONS	18
REFERENCES	REFERENCES	19
APPENDICES	APPENDICES	
Appendice 1. Liste des symboles	Appendix 1. List of symbols	20
Appendice 2. Liste des fonctions	Appendix 2. Listings	22
Appendice 3. Valeurs numériques de l'exemple	Appendix 3. Numerical values of the example	28
TABLEAU	TABLE	
Tableau 1. Fonctions du programme de la (ridge) régression pseudo-orthogonale	Table 1. Functions of the pseudo-orthogonal (ridge) regression program	8-9
FIGURE	FIGURE	
Figure 1. Variations de $\hat{\beta}^*$ en fonction de k (données centrées, réduites)	Figure 1. Variations of $\hat{\beta}^*$ as a function of k (standarized data)	13

INTRODUCTION

Les modèles de régression multiple sont largement utilisés en foresterie. Mais il arrive malheureusement souvent que le dispositif expérimental présente une forte collinéarité entre les variables explicatives. Dans ce cas, les estimateurs des moindres carrés deviennent instables c'est-à-dire que leurs valeurs et leurs signes changent erratiquement d'un échantillon à un autre.

Pour pallier à cet inconvénient, la (ridge) régression pseudo-orthogonale permet de réduire les effets de la multicollinéarité et ainsi d'obtenir les estimateurs stables.

INTRODUCTION

Multiple regression models are widely used in forestry. Unfortunately, it often happens that the experimental design shows high collinearity between predictor variables. In that case, least squares estimators become unstable in that their values and their signs change erratically from one sample to another.

This can be overcome by the use of pseudo-orthogonal (ridge) regression, which reduces the effects of multicollinearity and thus enables us to obtain stable estimators.

(RIDGE) REGRESSION PSEUDO-ORTHOGONALE

PSEUDO-ORTHOGONAL (RIDGE) REGRESSION

Le modèle général de la régression multiple linéaire peut s'écrire:

$$\tilde{Y} = \tilde{X}\beta + \varepsilon \quad (1)$$

où

\tilde{Y} est un vecteur de $n \times 1$ des n observations de la variable expliquée

\tilde{X} est une matrice de $n \times p$ des variables explicatives initialement centrée réduite pour que $\tilde{X}'\tilde{X}$ soit une matrice des corrélations

β est un vecteur de $p \times 1$ des paramètres inconnus de la régression

ε est un vecteur de $n \times 1$ des erreurs

Il est assumé que la moyenne de ε est nulle et que la variance de ε est constante, c'est-à-dire que les erreurs sont homocédastiques. En outre, l'utilisation des moindres carrés exige que la matrice $\tilde{X} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p]$ soit orthogonale, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation linéaire entre les colonnes de \tilde{X} de la forme:

$$\sum_{j=1}^p a_j \tilde{x}_j = 0 \quad (2)$$

où tous les paramètres a_j ne sont pas nuls.

S'il existe une ou plusieurs relations quali-linéaires entre les colonnes de \tilde{X} de la forme:

$$\sum_{j=1}^p a_j \tilde{x}_j \approx 0 \quad (3)$$

The general model for multiple linear regression can be written:

\tilde{Y} is an $n \times 1$ vector of n observed values of the dependant variable

\tilde{X} is an $n \times p$ matrix of predictor variables previously standardized so that $\tilde{X}'\tilde{X}$ is a correlation matrix

β is an $p \times 1$ vector of unknown regression parameters

ε is an $n \times 1$ vector of random errors

It is assumed that the mean of ε is zero and that the variance of ε is constant i.e. errors are homocedastic. In addition, the utilization of the least squares requires that matrix $\tilde{X} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p]$ is orthogonal i.e. there are no linear relations among the columns of \tilde{X} of the form:

where not all parameters a_j are zero.

If there are one or more nearly exact linear relationships among the columns of \tilde{X} of the form:

c'est-à-dire si \tilde{X} (ou $\tilde{X}'\tilde{X}$) possède une ou plusieurs faibles valeurs propres, \tilde{X} est dite quasi singulière ou multicollinéaire. Lorsque ce-ci se produit, les estimateurs des moindres carrés:

$$\hat{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'\tilde{Y} \quad (4)$$

possèdent des variances élevées.

Dans ces circonstances, Hoerl et Kennard (1970a et 1970b) ont montré que l'introduction d'un biais, c'est-à-dire d'une valeur $k > 0$ dans l'équation (4):

$$\hat{\beta}^* = (\tilde{X}'\tilde{X} + k\tilde{I}_p)^{-1}\tilde{X}'\tilde{Y} \quad (5)$$

rend les estimateurs stables

Pour l'étude théorique de (5) se référer à Hoerl et Kennard (1970a et 1970b), Marquardt (1970), Marquardt et Snee (1975), Gunst et Masson (1976, 1977a et 1977b). Essentiellement, Hoerl et Kennard ont prouvé que l'espérance mathématique de la distance entre $\hat{\beta}^*(k)$ et $\hat{\beta}$ décroît lorsque k augmente à partir de zéro, c'est-à-dire qu'il existe une valeur positive k telle que:

$$E(\hat{\beta}^*(k) - \hat{\beta})'(\hat{\beta}^*(k) - \hat{\beta}) < E(\hat{\beta} - \hat{\beta})'(\hat{\beta} - \hat{\beta}) \quad (6)$$

Ils ont aussi prouvé que le biais est une fonction monotone croissante de k , alors que la variance est une fonction monotone décroissante de k . Le problème est ainsi de trouver la valeur optimale de k . Un critère pour choisir k consiste à tracer graphiquement en fonction de k , les composantes de $\hat{\beta}^*(k)$ et la somme des carrés des résidus correspondante. Une valeur de k peut être choisie à laquelle les estimateurs deviennent stables et possèdent des valeurs raisonnables alors que la somme des carrés des résidus n'augmente pas de façon exagérée. Ce critère est intuitif, mais plausible.

i.e. if \tilde{X} (or $\tilde{X}'\tilde{X}$) has one or more small latent roots, \tilde{X} is said to be near-singular or multicollinear. When this occurs the least squares estimators:

have high variances.

In this occasion, Hoerl and Kennard (1970a and 1970b) showned that the introduction of a bias i.e. a constant $k > 0$ in equation (4)

makes estimators stable.

Refer to Hoerl and Kennard (1970a and 1970b), Marquardt (1970), Marquardt and Snee (1975), Gunst and Masson (1976, 1977a and 1977b) for theoretical study of (5). Basically, Hoerl and Kennard proved that the expected distance between $\hat{\beta}^*(k)$ and $\hat{\beta}$ decreases as k increases from zero i.e. there exist a positive value of k such that:

They also proved that the bias is a monotonically increasing function of k , while the variance is a monotonically decreasing function of k . Hence the problem is to find the optimum value of k . A criterion for the choice of k constant is to plot the components of $\hat{\beta}^*(k)$ and the corresponding residual sum of squares against k . A value of k can be chosen at which the regression estimators become stable and have reasonable values, while the residual sum of squares is not grossly inflated. This criterion is intuitive but plausible.

Il convient également de signaler que la (ridge) régression pseudo-orthogonale peut remplacer la régression par étapes dans la sélection des variables explicatives lorsque la multicollinearité existe. Ce dernier aspect de la (ridge) régression pseudo-orthogonale est expliqué et illustré par un exemple dans Boudoux et Ung (en préparation).

It should also be pointed out that pseudo-orthogonal (ridge) regression can replace stepwise regression in the selection of predictor variables when there is multicollinearity. This last aspect of pseudo-orthogonal (ridge) regression is explained and illustrated by an example in Boudoux and Ung (in preparation).

PROGRAMME APL DE LA (RIDGE) REGRESSION
PSEUDO-ORTHOGONALE

Le programme APL de la (ridge) régression pseudo-orthogonale présenté ici, a été développé à la Section Biométrie du Centre de Recherches forestières des Laurentides sur le système APL-XEROS de Analyste-Conseil Système Informatique Ltée (969, route de l'Eglise, Sainte-Foy, Québec G1V 3V4).

Compte-tenu de l'espace disponible dans le bloc de travail (69 276 octets), le programme accepte un maximum de 11 200 octets pour la matrice des données, soit $11\ 200/8 = 1\ 400$ éléments réels.

De façon optionnelle, le programme calcule et imprime:

- les moyennes et écarts-types des variables
- la matrice des corrélations simples entre les diverses variables
- les valeurs propres de \tilde{X}

Le programme demande ensuite l'entrée des valeurs de k. A chacune des valeurs de k, le programme imprime successivement:

- les estimateurs, leur variance, la somme des variances, la somme des carrés des résidus, la variance résiduelle et l'erreur-type de l'estimé correspondant aux données centrées réduites;
- le coefficient de détermination;

APL PROGRAM FOR PSEUDO-ORTHOGONAL
(RIDGE) REGRESSION

The APL program for pseudo-orthogonal (ridge) regression presented here has been developed at the Biometric Section of the Laurentian Forest Research Centre, on the APL-Xeros system of Analyste-Conseil Informatique Ltd (969, route de l'Eglise, Sainte-Foy, Quebec, G1V 3V4).

Taking into account the available space in a work block (69 276 bytes), the program accepts a maximum of 11 200 bytes for the data matrix or $11\ 200/8 = 1\ 400$ real elements.

Optionally, the program calculates and prints:

- means and standard deviations of variables
- simple correlation matrix between various variables
- eigenvalues of \tilde{X}

Next, the program requires entering of k values. For each value k, the program then prints in succession:

- estimators, their variance, the sum of the variances, the residual sum of squares, the residual variance and the standard error of estimate corresponding to the standardized data;
- the coefficient of determination;

- et, correspondant aux données non transformées, les estimateurs $\hat{\beta}^*$, la somme des carrés des résidus, la variance résiduelle, l'erreur-type de l'estimé et finalement les variances et écarts-types de $\hat{\beta}$ (c'est-à-dire pour $k = 0$).

Enfin, de façon optionnelle, le programme trace graphiquement les composantes de $\hat{\beta}^*$ en fonction de k .

Les diverses fonctions du programme avec leur niveau d'exécution et leur rôle sont montrés dans le tableau 1.

- estimators $\hat{\beta}^*$, the residual sum of squares, the residual variance, the standard error of estimate and finally variances and standard deviations of $\hat{\beta}$ (i.e. for $k = 0$) corresponding to the untransformed data.

Lastly, as an option, the program plots components of $\hat{\beta}^*$ against k .

The various functions of the program with their execution level and their role are shown in Table 1.

Niveau	Fonction	Rôle
1	PSEUDO	Fonction monitrice
2	STADESCRIP	Statistiques descriptives: moyennes et écart-types de \bar{Y} et de x_j étudiés
2	COR	Matrice des corrélations entre \bar{Y} et x_j étudiés
2	EIGVAL	Valeurs propres des matrices carrées symétriques ou non symétriques
2	VAS	Standardisation des variables
2	RIRE	(Ridge) régression pseudo-orthogonale
3	RENTRA	Retour aux données non transformées: calcul des paramètres
2	TRACE	Impression graphique de $\hat{\beta}^*$ en fonction de k
3	GRAPH	Graphique avec système d'axes
3	GG	Graphique sans système d'axes

Tableau 1. Fonctions du programme de la (ridge) régression pseudo-orthogonale

Level	Function	Role
1	PSEUDO	Monitoring function
2	STADESCRIP	Descriptive statistics: means and standard deviations of \bar{Y} and \bar{x}_j studied
2	COR	Matrix of correlations between \bar{Y} and \bar{x}_j studied
2	EIGVAL	Eigenvalues of the symmetric or asymmetric but square matrices
2	VAS	Standardization of the variables
2	RIRE	Pseudo-orthogonal (ridge) regression
3	RENTRA	Return to untransformed data: computation of the parameters
2	TRACE	Plotting $\hat{\beta}^*$ against k
3	GRAPH	Graph with a system of axes
3	GG	Graph without a system of axes

Table 1. Functions of the pseudo-orthogonal (ridge) regression program

EXEMPLE D'UTILISATION DU PROGRAMME

L'exemple de l'utilisation du programme concerne l'établissement d'une équation de régression multiple permettant de calculer le volume sur pied à l'hectare en fonction de certaines caractéristiques d'un peuplement de sapin boréal.

Deux cents parcelles expérimentales d'une superficie d'un dixième d'acre (environ 0.04 ha) ont été extraites de la banque des données forestières du Ministère des Terres et Forêts du Québec. Pour chaque parcelle, les renseignements suivants sont disponibles:

V: volume total des tiges marchandes
en m^3/ha

AGE: âge moyen de la parcelle

DHP: dhp en cm

GM: surface terrière marchande en
 m^3/ha

NM: nombre de tiges marchandes par ha

HT: hauteur totale moyenne en m.

Les 200 observations de ces variables sont montrées à l'appendice 3.

L'étude porte sur la régression de V sur AGE, DHP, GM, NM et HT.

La colonne 1 de la matrice des données doit toujours contenir les observations de la variable expliquée. Les colonnes 2 et suivantes contiennent celles des variables explicatives.

L'examen de la matrice des corrélations montre de fortes corrélations entre certaines variables explicatives telles que AGE et HT (0.890), GM et NM (0.860). Cette collinéarité

EXAMPLE OF THE USE OF THE PROGRAM

As an example of the use of the program, we may take the determination of a multiple regression equation for computing the standing volume per hectare as a function of some characteristics of a stand of balsam fir.

Two hundred experimental plots of one tenth of an acre (about 0.04 ha) each, were extracted from the forest data bank of the Ministère des Terres et Forêts du Québec. For each plot, the following information is available:

V: total volume of merchantable boles
in m^3/ha

AGE: average age of the plot

DHP: dbh in cm

GM: merchantable basal area in
 m^3/ha

NM: number of merchantable boles per ha

HT: total average height in m

The 200 observations of these variables are shown in appendix 3.

The study concerns the regression of V on AGE, DHP, GM, NM and HT.

Column 1 of the data matrix must always contain the observations of the dependent variable. Column 2 and following columns contain the observations of the prediction variables.

An examination of the correlation matrix shows strong correlations between some prediction variables such as AGE and HT (0.890), GM and NM (0.860). This collinearity is

est d'ailleurs confirmée par une faible valeur propre de X (0.039).

Pour $k = 0$ (moindres carrés), l'équation du volume en fonction de diverses variables explicatives s'écrit pour les données centrées, réduites:

$$\hat{V} = -0.0175 \text{ AGE} + 0.0088 \text{ DHP} + 1.3900 \text{ GM} \\ -0.5139 \text{ NM} + 0.0328 \text{ HT} \dots \dots \dots \quad (7)$$

et pour les données non transformées:

$$\hat{V} = -4.7850 - 0.1681 \text{ AGE} + 0.2224 \text{ DHP} \\ + 7.4090 \text{ GM} - 0.0451 \text{ NM} + 0.6825 \text{ HT} \dots \dots \dots \quad (8)$$

D'après l'équation (7), relativement aux coefficients des autres variables, ceux de GM et de NM ont des valeurs absolues trop grandes et leurs variances sont élevées. D'autre part deux signes aberrants apparaissent dans l'équation (7) et (8): -0.1681 de AGE et -0.0451 de NM. Ceci signifie que si deux peuplements, par ailleurs égaux, avaient 10 ans de différence, le plus vieux aurait $1.68 m^3$ de moins que le plus jeune ou que si le nombre d'arbres augmentait de 10, le volume diminuerait de $0.45 m^3$. Ces signes aberrants sont causés par la multicollinearité signalée auparavant par les fortes corrélations entre certaines variables explicatives.

Par contre, l'examen simultané des $\hat{\beta}$ obtenus à partir des données centrées, réduites présentées à la figure 1, de leurs variances et des erreurs-types de l'estimé, permet de conclure que $\hat{\beta}^*$ commence à se stabiliser à $k = 0.2$. Les signes incorrects des coefficients des variables AGE et NM observés à $k = 0$, disparaissent à $k = 0.2$. La somme des variances de $\hat{\beta}^*$ diminue de 0.00153 pour $k = 0$ à 0.00125 pour $k = 0.2$. Toutefois, à cause du biais introduit par k , l'erreur-type de l'estimé passe de 0.0063 pour $k = 0$ à 0.0185 pour $k = 0.2$.

moreover confirmed by a low eigenvalue of \tilde{X} (0.039).

For $k = 0$ (least squares) the equation of the volume as a function of the various prediction variables is written for standardized data as follows:

and for untransformed data:

According to equation 7, with respect to the coefficients of the other variables, the coefficients of GM and NM have too high absolute values and high variances. In addition, two aberrant signs appear in equations 7 and 8: -0.1681 for AGE and -0.0451 for NM. This would mean that if two otherwise similar stands differed in age by 10 years, the merchantable volume would be $1.68 \text{ m}^3/\text{ha}$ less in the older plot, or alternatively, if the number of trees were increased by 10, the volume would decrease by 0.45 m^3 . These aberrant signs are caused by the multicollinearity indicated before by the strong correlations between some prediction variables.

Contrarily, an examination of the values of $\hat{\beta}^*$ obtained from the standardized data shown in figure 1, their variances, and their standard errors of estimate, lead us to the conclusion that $\hat{\beta}^*$ begins to stabilize at $k = 0.2$. The incorrect signs of the coefficients of AGE and NM at $k = 0$ disappear at $k = 0.2$. The sum of the variances of $\hat{\beta}^*$ decreases from 0.00153 for $k = 0$ to 0.00125 for $k = 0.2$. However, because of the bias introduced by k , the standard error of estimate goes from 0.0063 for $k = 0$ to 0.0185 for $k = 0.2$.

En définitive, l'équation suivante correspondant aux données centrées, réduites est meilleure que les équations (7) et (8) obtenues par les moindres carrés.

$$\hat{V} = 0.0477 \text{ AGE} + 0.2420 \text{ DHP} + 0.5877 \text{ GM} \\ + 0.1708 \text{ NM} + 0.0560 \text{ HT} \quad (9)$$

Pour être utilisée avec les données brutes, c'est-à-dire ni centrées, ni réduites, l'équation (9) peut être transformée en:

$$\hat{V} = -0.0112 + 0.4576 \text{ AGE} + 6.1140 \text{ DHP} + 3.1340 \text{ GM} \\ + 0.0150 \text{ NM} + 1.1650 \text{ HT} \quad (10)$$

In short, the following equation (standardized data) is better than equations 7 and 8 obtained by the least squares method.

For use with original (unstandardized) data, equation (9) can be transformed into:

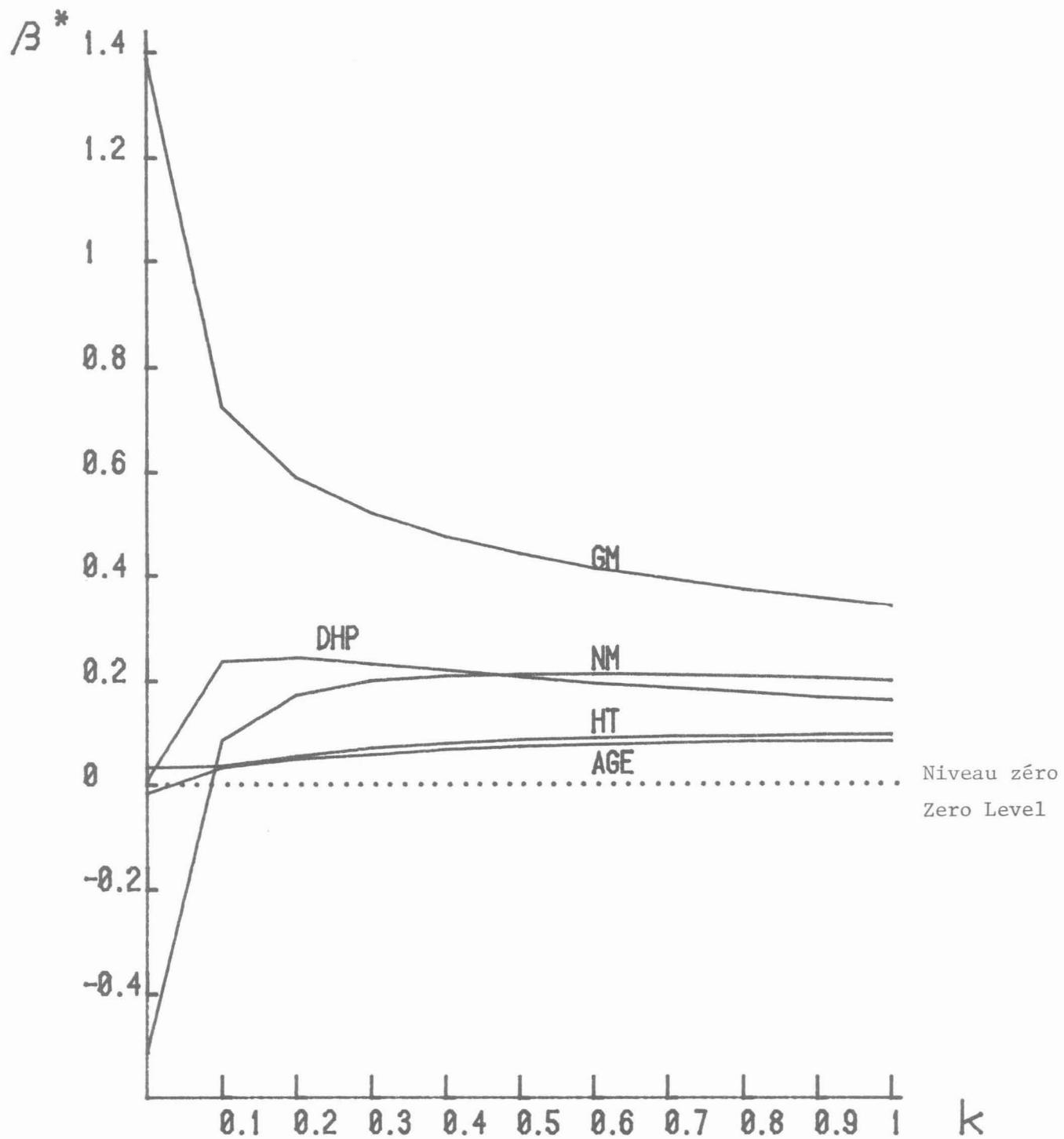


Figure 1. Variations de $\hat{\beta}^*$ en fonction de k (données centrées, réduites)

Variations of $\hat{\beta}^*$ as a function of k (standardized data)

)LOAD PSEUDOREG
PSEUDOREG SAVED 15:28 MAY 16, '78
)COPY HUDO PR4555M
HUDO SAVED 15:32 APR 04, '78

PR4555M PSEUDO 2 3 4 5 6
MEANS, STANDARD DEVIATIONS YES
MOYENNES, ECARTS-TYPES ? OUI
103.446 62.908
48.410 6.552
14.735 2.490
22.011 11.798
1296.682 717.003
12.401 3.022

CORRELATIONS MATRIX? YES
MATRICE DES CORRELATIONS ? OUI

1.000 0.507 0.466 0.957 0.682 0.535
0.507 1.000 0.540 0.412 0.159 0.890
0.466 0.540 1.000 0.252 -0.187 0.598
0.957 0.412 0.252 1.000 0.860 0.430
0.682 0.159 -0.187 0.860 1.000 0.165
0.535 0.890 0.598 0.430 0.165 1.000

EIGENVALUES? YES
VALEURS PROPRES ? OUI
VALEUR PROPRE NO :
1 2.742E0
2 1.609E0
3 5.032E-1
4 1.077E-1
5 3.884E-2

VALUES OF K:
VALEURS DE K : 0 .1 .2 .3 .6 .8 1

STANDARDIZED DATA
 DONNEES CENTREES ET REDUITES

VALUES OF K	VALEURS DE K					
0.000E0	1.000E-1	2.000E-1	3.000E-1	6.000E-1	8.000E-1	1.000E0

REGRESSION COEFFICIENTS:
COEFFICIENTS DES REGRESSIONS : BETA

-1.750E-2	3.222E-2	4.766E-2	5.836E-2	7.605E-2	8.126E-2	8.375E-2
8.802E-3	2.365E-1	2.420E-1	2.304E-1	1.925E-1	1.733E-1	1.580E-1
1.390E0	7.230E-1	5.877E-1	5.186E-1	4.110E-1	3.686E-1	3.364E-1
-5.139E-1	8.482E-2	1.708E-1	1.988E-1	2.112E-1	2.050E-1	1.966E-1
3.279E-2	3.657E-2	5.597E-2	6.902E-2	8.806E-2	9.278E-2	9.459E-2

VARIANCES OF $\hat{\beta}$ AND $\hat{\beta}^*$
VARIANCES DES BETAS

1.959E-4	3.638E-4	2.911E-4	2.440E-4	1.807E-4	1.607E-4	1.469E-4
1.531E-4	2.649E-4	2.677E-4	2.583E-4	2.268E-4	2.088E-4	1.931E-4
4.911E-4	2.984E-4	2.065E-4	1.729E-4	1.420E-4	1.339E-4	1.279E-4
4.719E-4	2.779E-4	1.934E-4	1.658E-4	1.457E-4	1.412E-4	1.372E-4
2.201E-4	3.821E-4	2.907E-4	2.358E-4	1.677E-4	1.483E-4	1.356E-4

SUM OF VARIANCES OF $\hat{\beta}$ AND $\hat{\beta}^*$
SOMME DES VARIANCES DES BETA

1.532E-3	1.587E-3	1.249E-3	1.077E-3	8.628E-4	7.930E-4	7.407E-4
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

STANDARD DEVIATIONS OF $\hat{\beta}$ AND $\hat{\beta}^*$
ECARTS-TYPES DES BETAS

1.400E-2	1.907E-2	1.706E-2	1.562E-2	1.344E-2	1.268E-2	1.212E-2
1.237E-2	1.628E-2	1.636E-2	1.607E-2	1.506E-2	1.445E-2	1.390E-2
2.216E-2	1.728E-2	1.437E-2	1.315E-2	1.192E-2	1.157E-2	1.131E-2
2.172E-2	1.667E-2	1.391E-2	1.288E-2	1.207E-2	1.188E-2	1.171E-2
1.484E-2	1.955E-2	1.705E-2	1.536E-2	1.295E-2	1.218E-2	1.164E-2

RETURN TO UNSTANDARDIZED DATA

RETOUR AUX DONNEES BRUTES

VALUES OF K

VALEURS DE K

0.000E0 1.000E-1 2.000E-1 3.000E-1 6.000E-1 8.000E-1 1.000E0

REGRESSION COEFFICIENTS

COEFFICIENTS DES REGRESSIONS

-4.785E0	-1.035E2	-1.117E2	-1.107E2	-9.857E1	-8.938E1	-8.058E1
1.681E-1	3.094E-1	4.576E-1	5.603E-1	7.302E-1	7.802E-1	8.041E-1
2.224E-1	5.974E0	6.114E0	5.821E0	4.864E0	4.379E0	3.993E0
7.409E0	3.855E0	3.134E0	2.765E0	2.192E0	1.966E0	1.794E0
-4.509E-2	7.442E-3	1.499E-2	1.744E-2	1.853E-2	1.799E-2	1.725E-2
6.825E-1	7.611E-1	1.165E0	1.437E0	1.833E0	1.931E0	1.969E0

RESIDUAL SUMS OF SQUARES,

RESIDUAL VARIANCES,

STANDARD ERRORS OF ESTIMATE

SOMMES DES CARRES DES RESIDUS, VARIANCES RESIDUELLES, ERREURS-TYPES DE L'ESTIME

6.158E3	3.574E4	5.238E4	6.571E4	1.015E5	1.239E5	1.453E5
3.174E1	1.842E2	2.700E2	3.387E2	5.232E2	6.386E2	7.491E2
5.634E0	1.357E1	1.643E1	1.840E1	2.287E1	2.527E1	2.737E1

VARIANCES STANDARD DEVIATIONS OF $\hat{\beta}$

VARIANCES ECARTS-TYPES DE BETA POUR K=0

1.806E-2	1.344E-1
9.772E-2	3.126E-1
1.396E-2	1.182E-1
3.632E-6	1.906E-3
9.537E-2	3.088E-1

YES

TRACES ? OUI

RESIDUAL SUMS OF SQUARES,
SOMMES DES CARRES DES RESIDUS, VARIANCES RESIDUELLES, ERREURS-TYPES DE L'ESTIME

$7.820E^{-3}$	$4.538E^{-2}$	$6.651E^{-2}$	$8.343E^{-2}$	$1.289E^{-1}$	$1.573E^{-1}$	$1.845E^{-1}$
$4.031E^{-5}$	$2.339E^{-4}$	$3.428E^{-4}$	$4.301E^{-4}$	$6.643E^{-4}$	$8.109E^{-4}$	$9.512E^{-4}$
$6.349E^{-3}$	$1.529E^{-2}$	$1.852E^{-2}$	$2.074E^{-2}$	$2.577E^{-2}$	$2.848E^{-2}$	$3.084E^{-2}$

COEFFICIENTS OF DETERMINATION
COEFFICIENTS DE DETERMINATION

$9.922E^{-1}$	$8.370E^{-1}$	$7.580E^{-1}$	$6.947E^{-1}$	$5.542E^{-1}$	$4.856E^{-1}$	$4.299E^{-1}$
---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

CONCLUSIONS

L'exemple montre qu'en régression linéaire multiple, la présence de collinéarité entre les variables explicatives a pour effet d'éloigner les valeurs des coefficients obtenues par les moindres carrés des vraies valeurs qu'on cherche à estimer. Cependant, la (ridge) régression pseudo-orthogonale, tout en donnant une meilleure image des effets de la collinéarité, permet de remédier aux inconvénients des moindres carrés par le choix d'une valeur optimale de k.

La (ridge) régression pseudo-orthogonale est une technique statistique que les forestiers trouveront très utile puisqu'en foresterie les dispositifs expérimentaux présentent souvent de la multicollinearité. La technique permet d'obtenir, dans ces circonstances, des estimateurs fiables c'est-à-dire à faibles variances quoique biaisés par l'introduction de k.

CONCLUSIONS

The example shows that with multiple linear regression, collinearity between prediction variables causes the coefficient obtained by the least squares method to differ from the real values for which an estimate is being sought. Pseudo-orthogonal (ridge) regression, on the other hand, both gives a better picture of the effects of collinearity and removes the disadvantages of the least squares method by choosing an optimum value for k.

Pseudo-orthogonal (ridge) regression is a statistical technique which foresters will find very useful since in forestry experimental designs often show multicollinearity. In that case, this technique will yield reliable estimators, that is to say, estimators showing low variances even though these estimators are biased by the introduction of k.

REFERENCES

- BONENFANT, F. 1977. Outils graphiques pour terminal Tektronix. Mémoire technique #2. Centre de Recherches Forestières des Laurentides, Québec, 27 p.
- BOUDOUX, M. et/and C.H. UNG. Applications of pseudo-orthogonal regression to forest research (en/in preparation)
- GUNST, R.F. et/and R.L. MASON. 1976. Generalized mean square error properties of regression estimators. Communication in statistics. 5:1501-1608.
- GUNST, R.F. et/and R.L. MASON. 1977a. Biased estimation in regression. An evaluation using mean square error. J. Am. Statist. Ass. 72: 616-628.
- GUNST, R.F. et/and R.L. MASON. 1977b. Advantages of examining multicollinearities in regression analysis. Biometrics. 33: 249-260.
- HOERL, A.E. et/and R.W. KENNARD. 1970a. Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems. Technometrics. 12(1): 55-69.
- HOERL, A.E. et/and R.W. KENNARD. 1970b. Ridge regression: application to nonorthogonal problems. Technometrics. 12(1): 69-82.
- MARQUARDT, D.W. 1970. Generalised inverses, ridge regression, biased linear estimation and nonlinear estimation. Technometrics. 12: 591-612.
- MARQUARDT, D.W. et/and R.D. SNEE. 1975. Ridge regression in practice. The American Statistician. 29: 3-20.

	Appendice 1. Liste des symboles	Appendix 1. List of symbols
A	: matrice carrée symétrique ou non symétrique utilisée dans la fonction EIGVAL. Dans RIRE, $A = (XS)'(XS)$ où XS désigne la matrice des \tilde{x}_j standardisés	A : Symmetric matrix or asymmetric but square matrix used in the EIGVAL function. In RIRE, $A = (XS)'(XS)$, where XS represents the matrix of the standardized \tilde{x}_j
B	: paramètres des régressions correspondant aux données centrées, réduites	B : parameters of the regressions corresponding to standardized data
BR	: paramètres des régressions correspondant aux données non transformées	BR : parameters of the regressions corresponding to unstandardized data
C	: nombre total des valeurs de K	C : total number of values of k
CODET:	coefficients de détermination	CODET: coefficients of determination
DATA :	matrice des données dont la colonne 1 contient la variable expliquée \tilde{Y} et les autres, les variables explicatives \tilde{x}_j	DATA : data matrix in which column 1 contains the dependent variable \tilde{Y} , and the other columns, the prediction variables \tilde{x}_j
E	: vecteur dont la première composante désigne le nombre maximum d'itérations et la deuxième, la précision, ce vecteur est utilisé dans la fonction EIGVAL	E : vector, the first component of which is the maximum number of iterations and the second component, the precision, this vector being used in the EIGVAL function
EDATA:	écart-types des variables	EDATA: standard deviations of variables
I	: matrice-unité	I : unity-matrix
K	: valeur variant entre 0 et 1 et entrant dans la relation	K : value varying between 0 and 1 and entering the relation
	$\hat{\beta}^* = (\tilde{X}'\tilde{X} + kI)^{-1}\tilde{X}'\tilde{Y}$	$\hat{\beta}^* = (\tilde{X}'\tilde{X} + kI)^{-1}\tilde{X}'\tilde{Y}$
<u>K</u>	: compteur des éléments de K	<u>K</u> : counter of the K elements
MDATA:	moyennes des variables	MDATA: means of variables
N	: nombre d'observations	N : number of observations

P : nombre de variables explicatives plus un	P : number of prediction variables plus one
PHI : matrice dont la ligne 1 contient les sommes des carrés des résidus, la ligne 2, les variances résiduelles, la ligne 3, les erreurs-types de l'estimé correspondant aux données centrées réduites	PHI : matrix in which line 1 contains the residual sums of squares, line 2, the residual variances, line 3, the standard errors of estimate (standardized data)
PHIR: matrice dont la ligne 1 contient les sommes des carrés des résidus, la ligne 2, les variances résiduelles, la ligne 3, les erreurs-types de l'estimé correspondant aux données non transformées	PHIR: matrix of which line 1 contains the residual sums of squares, line 2, the residual variances, line 3, the standard errors of estimate (untransformed data)
SCTO: somme totale des carrés égale à $\Sigma(y - \bar{y})^2$	SCTO: total sum of squares equal to $\Sigma(y - \bar{y})^2$
V : vecteur des valeurs propres	V : the vector of eigenvalues
VA : variances de B	VA : variances of B
VI : numéros des variables explicatives	VI : numbers of the prediction variables
XR : matrice des variables explicatives non transformées	XR : matrix of the untransformed prediction variables
XS : matrice des variables explicatives centrées, réduites	XS : matrix of the standardized prediction variables

Appendice 2. Liste des fonctions
 Appendix 2. Listings

```

  ▽VPSEUDO[ ]▽
  DATA PSEUDO VI;Z;A;C;CODET;I;N;P;SCTO;XS;YS;Z;ZZ;K;MDATA;EDATA;XR;YR
[1] STADESCRIP DATA[ ;1,VI]
[2] →L5×1~0ΔN QUESTION'MOYENNES, ECARTS-TYPES ? '
[3] 'F10.3'ΔFMT(MDATA;EDATA)
[4] L5:→L2×1~0ΔN QUESTION'MATRICE DES CORRELATIONS ? ';□←3 1p' '
[5] 'F7.3'ΔFMT COR DATA[ ;1,VI];□←2 1p' '
[6] L2:→L1×1~0ΔN QUESTION'VALEURS PROPRES ? ';□←3 1p' '
[7] 200 1E-12 EIGVAL COR DATA[ ;VI]
[8] L1:K←εQUESTION'VALEURS DE K : ';□←3 1p' '
[9] CODET←CpK,0pPHIR←PHI←(3,C)pK,0pBR←(P,C)pK,0pB←VA←((P-1),C)pK←1,0pC←p
  K,0pP←(pVI)+1,0pN←(pDATA)[1]
[10] I←(1P-1)◦.=1P-1
[11] XS←VAS DATA[ ;1,VI]
[12] YS←XS[ ;1]
[13] A←(QXS)+.×XS+0 1↓XS
[14] SCTO←Z+.×Z←YS-(+/YS)÷N
[15] YR←DATA[ ;1],0pXR←(Np1),DATA[ ;VI]
[16] RIRE
[17] 'DONNEES CENTREES ET REDUITES'
[18] , 'E10.4'ΔFMT K;□←3 1p' '
[19] ' COEFFICIENTS DES REGRESSIONS :      BETA';□←2 1p' '
[20] 'E10.4'ΔFMT B;□←1 1p' '
[21] ' VARIANCES DES BETAS';□←2 1p' '
[22] 'E10.4'ΔFMT VA;□←1 1p' '
[23] ' SOMME DES VARIANCES DES BETA';□←2 1p' '
[24] , 'E10.4'ΔFMT(+VA);□←1 1p' '
[25] 'ECARTS-TYPES DES BETAS';□←2 1p' '
[26] 'E10.4'ΔFMT(VA*0.5);□←1 1p' '
[27] ' SOMMES DES CARRES DES RESIDUS, VARIANCES RESIDUELLES, ERREURS-T
  YPES DE L''ESTIME';□←2 1p' '
[28] 'E10.4'ΔFMT PHI;□←1 1p' '
[29] ' COEFFICIENTS DE DETERMINATION';□←2 1p' '
[30] , 'E10.4'ΔFMT CODET;□←1 1p' '
[31] 0pQUESTION'RETOUR AUX DONNES BRUTES';□←3 1p' '
[32] , 'E10.4'ΔFMT K;□←2 1p' '
[33] ' COEFFICIENTS DES REGRESSIONS';□←2 1p' '
[34] 'E10.4'ΔFMT BR;□←1 1p' '
[35] ' SOMMES DES CARRES DES RESIDUS, VARIANCES RESIDUELLES, ERREURS-T
  YPES DE L''ESTIME';□←2 1p' '
[36] 'E10.4'ΔFMT PHIR;□←1 1p' '
[37] 'VARIANCES ECARTS-TYPES DE BETA POUR K=0';□←3 1p' '
[38] Z←1↓(,(1P)◦.=1P)/,PHIR[2;1]×Q(XR)+.×XR
[39] 'E10.4'ΔFMT(Z;(Z*0.5))
[40] L3:→L4×1~0ΔN QUESTION'TRACES ? ';□←3 1p' '
[41] TRACE
[42] →L3
[43] L4:→L1×1~0ΔN QUESTION'AUTRES REGRESSIONS ? '

```

▽

```

    VPSEUDO[ ]▽
    ▽ DATA PSEUDO VI;Z;A;C;CODET;I;N;P;SCTO;XS;YS;Z;ZZ;K;
[44] [ ]▽
[1] STADESCRIP DATA[ ;1,VI]
[2] →L5×1~OΔN QUESTION'MOYENNES, ECARTS-TYPES ? '
[3] 'F10.3'ΔFMT(MDATA;EDATA)
[4] L5:→L2×1~OΔN QUESTION'MATRICE DES CORRELATIONS ? ' ;□←
  3 1p' '
[5] 'F7.3'ΔFMT COR DATA[ ;1,VI];□←2 1p' '
[6] L2:→L1×1~OΔN QUESTION'VALEURS PROPRES ? ' ;□←3 1p' '
[7] 200 1E-12 EIGVAL COR DATA[ ;VI]
[8] L1:K←εQUESTION'VALEURS DE K : ' ;□←3 1p' '
[9] CODET←C pK,0pPHIR←PHI←(3,C)pK,0pBR←(P,C)pK,0pB←VA←((P-1
 ),C)pK←1,0pC←pK,0pP←(pVI)+1,0pN←(pDATA)[1]
[10] I←(1P-1)◦.=1P-1
[11] XS←VAS DATA[ ;1,VI]
[12] YS←XS[ ;1]
[13] A←(QXS)+.×XS←0 1+XS
[14] SCTO←Z+.×Z←YS-(+/YS)÷N
[15] YR←DATA[ ;1],0pXR←(Np1),DATA[ ;VI]
[16] RIRE
[17] 'DONNEES CENTREES ET REDUITES'
[18] , 'E10.4'ΔFMT K;□←3 1p' '
[19] '      COEFFICIENTS DES REGRESSIONS :      BETA';□←2 1p' '
  ,
[20] 'E10.4'ΔFMT B;□←1 1p' '
[21] '      VARIANCES DES BETAS';□←2 1p' '
[22] 'E10.4'ΔFMT VA;□←1 1p' '
[23] 'SOMME DES VARIANCES DES BETA';□←2 1p' '
[24] , 'E10.4'ΔFMT(+VA);□←1 1p' '
[25] 'ECARTS-TYPES DES BETAS';□←2 1p' '
[26] 'E10.4'ΔFMT(VA*0.5);□←1 1p' '
[27] '      SOMMES DES CARRES DES RESIDUS, VARIANCES RESIDUE
 LLES, ERREURS-TYPES DE L''ESTIME';□←2 1p' '
[28] 'E10.4'ΔFMT PHI;□←1 1p' '
[29] '      COEFFICIENTS DE DETERMINATION';□←2 1p' '
[30] , 'E10.4'ΔFMT CODET;□←1 1p' '
[31] 0pQUESTION'RETOUR AUX DONNES BRUTES';□←3 1p' '
[32] , 'E10.4'ΔFMT K;□←2 1p' '
[33] '      COEFFICIENTS DES REGRESSIONS';□←2 1p' '
[34] 'E10.4'ΔFMT BR;□←1 1p' '
[35] '      SOMMES DES CARRES DES RESIDUS, VARIANCES RESIDUE
 LLES, ERREURS-TYPES DE L''ESTIME';□←2 1p' '
[36] 'E10.4'ΔFMT PHIR;□←1 1p' '
[37] 'VARIANCES ECARTS-TYPES DE BETA POUR K=0';□←3 1p' '
[38] Z←1+(,(1P)◦.=1P)/,PHIR[2;1]×Q(XR)+.×XR
[39] 'E10.4'ΔFMT(Z;(Z*0.5))
[40] L3:→L4×1~OΔN QUESTION'TRACES ? ' ;□←3 1p' '
[41] TRACE
[42] →L3
[43] L4:→L1×1OΔN QUESTION'AUTRES REGRESSIONS ? '

```

```

    VRIRE[]▽
    ▽ RIRE
[1] L1:Z←A+I×K[K] a INVERSE (X'X+IK)
[2] ZZ←XS+.×B[ ;K]←Z+.×(QXS)+.×YS a B: PARAMETRES DE REGRESS
ION. ZZ : Y CALCULE
[3] CODET[K]←(Z+.×Z+ZZ-(+/ZZ)÷N)÷SCT a COEFFICIENT DE DETERMINATION
[4] PHI[1;K]←Z←(QYS-ZZ)+.×YS-ZZ a SOMME DES CARRES DES RESIDUS
[5] PHI[2;K]←Z←Z÷N-P a VARIANCE RESIDUELLE. P=NB VAR EXPLICA
+ 1
[6] PHI[3;K]←Z*0.5 a ERREUR-TYPES DE L'ESTIME
[7] VA[;K]←(( ,I)/ ,Z×Z+.×A+.×Z) a VAR. DE B
[8] a RETOUR AUX DONNEES NON TRANSFORMEES
[9] EDATA RENTRA MDATA a CALCUL DES BETAS
[10] PHIR[1;K]←Z←(QYR- ,ZZ)+.×YR- ,ZZ←XR+.×BR[ ;K] a Z : SOMME D
ES CARRES DES RESIDUS. ZZ : Y CALCULE
[11] PHIR[2;K]←Z←Z÷N-P
[12] PHIR[3;K]←Z*0.5
[13] →(C≥K←K+1) pL1
    ▽

```

```

    VRENTRA[]▽
    ▽ EDATA RENTRA MDATA
[1] Z←EDATA[1]×( ,B[ ;K])÷1↓EDATA
[2] BR[ ;K]←(MDATA[1]-+ /Z×1↓MDATA) ,Z
    ▽

```

```

    VTRACE[]▽
    ▽ TRACE;Z;K;Z
[1] Z←,εZ←QUESTION'NO DES TRACES : '
[2] Z←(L/K),(Γ/K),(L/,B),Γ/,B
[3] →L2×ι~OΔN QUESTION'CHANGER ECHELLES ? '
[4] Z←εQUESTION'ECHELLES : '
[5] L2:(0.01×L0.5+100×Z)GRAPH B[Z[1];]VS K
[6] →0×ι(pZ)=K←1
[7] L1:K GG( ,B[Z[K+1]; ])VS K
[8] →((pZ)>K←K+1) pL1
    ▽

```

```

    VSTADESCRIP[]▽
    ▽ STADESCRIP DATA;Z
[1]   Z←DATA-(ρDATA)ρMDATA←(+DATA)÷N←(ρDATA)[1]
[2]   EDATA←((+Z★2)÷N-1)*0.5
    ▽

```

```

    VCOR[]▽
    ▽ R←COR X
[1]   R←X-(ρX)ρ(+X)÷(ρX)[1]
[2]   R←(R)×R←R÷(ρR)ρ(+R★2)*0.5
    ▽

```

```

    VEIGVAL[]▽
    ▽ E EIGVAL A;B;L;X;Y;Z
[1]   V←10
[2]   L2:Z←0
[3]   X←(1↑ρA)ρ1
[4]   L3:X←X÷L←1↑X←A+.×Y←X
[5]   →(0=(E[1]>Z←Z+1)+E[2]>B←「/|Y-X)/L5
[6]   →(E[1]>Z)×(E[2]<B)/L3
[7]   V←V,L
[8]   →L2×1≤1↑ρA←1 1↑A-X○.×A[1;]
[9]   L4:'VALEUR PROPRE NO : '
[10]  'X7,I2,X10,E10.4'ΔFMT((1ρV);V)
[11]  →0
[12]  L5:'NOMBRE MAX D'ITERATIONS ATTEINT : ';E[1]
[13]  →L4
    ▽

```

```

    VVAS[]▽
    ▽ R←VAS X
[1]   R←X-(ρX)ρ(+X)÷(ρX)[1]
[2]   E←R÷(ρR)ρ(+R★2)*0.5
    ▽

```

(*) $\nabla GRAPH[\square] \nabla$

$\nabla XY GRAPH \underline{\Delta}M; DX; DY; I; X; Y$

[1] $S\Delta GRAPH \leftarrow 2 2\rho R2, 100, R3, 0$

[2] $\rightarrow (1 2 4 = \rho, XY) / L0, L2, L3; \rightarrow (\wedge 1 2 \neq \rho \rho \underline{\Delta}M) / R1; \rightarrow (0 \in \rho \underline{\Delta}M) / 0$

[3] $\rightarrow 0, \rho \square \leftarrow 'ERREUR DE DIMENSION DANS L''ECHELLE'$

[4] $L0: \rightarrow (XY \neq 0) / L1$

[5] $\rightarrow L3, \rho XY \leftarrow 1, (\rho \underline{\Delta}M), (\underline{L} / \underline{\Delta}M), (\Gamma / \underline{\Delta}M; \rightarrow (1 \neq \rho \rho \underline{\Delta}M) / 1 + \text{I26}$

[6] $\rightarrow L3, \rho XY \leftarrow (\underline{L} / \underline{\Delta}M[1;]), (\Gamma / \underline{\Delta}M[1;]), (\underline{L} / \underline{\Delta}M[2;]), (\Gamma / \underline{\Delta}M[2;])$

[7] $L1: \rightarrow L3, \rho XY \leftarrow 4 \rho 0, XY$

[8] $L2: XY \leftarrow 0, XY[1], 0, XY[2]$

[9] $L3: DX \leftarrow (XY[2] - XY[1]) \div 10; DY \leftarrow (XY[4] - XY[3]) \div 10; PAGE$

[10] $3 \Delta GRF(XY[1] - DX), (XY[2] + DX), (XY[3] - DY), XY[4] + DY$

[11] $\square \leftarrow XY[2 3 \rho 1 1 2 4 3 3]; \square \leftarrow \underline{\Delta}M; I \leftarrow 1$

[12] $Y \leftarrow XY[3] + DY \times 10; X \leftarrow XY[1] + DX \times 10$

[13] $LY: '_-' ; 4 \Delta GRF XY[1], Y[I]$

[14] $Y[I]; 4 \Delta GRF(XY[1] - DX), Y[I]$

[15] $I \leftarrow 1; \rightarrow (10 \geq I \leftarrow I + 1) / LY$

[16] $LX: 'L', 2\bar{T}8 32; X[I]; 4 \Delta GRF X[I], XY[3]$

[17] $\rightarrow 0; 8 \Delta GRF 2; \rightarrow (10 \geq I \leftarrow I + 1) / LX$

[18] $R1: \rightarrow 0, \rho \square \leftarrow 'ERREUR DE RANG DANS LES DONNEES'$

[19] $R2: \rightarrow 0, \rho \square \leftarrow 'EXECUTION ABANDONNEE.'; 8 \Delta GRF 2$

[20] $R3: 'ERREUR'; I; ' DANS GRAPH'; I \leftarrow 16\bar{T}0; 8 \Delta GRF 2$

∇

(*) $\nabla \begin{matrix} \nabla G G[\square] \nabla \\ C G G \underline{\Delta}M; E; F; R; I; II \end{matrix}$

[1] $\underline{\Delta}M \leftarrow (1 \rho \underline{\Delta}M), [0.5] \underline{\Delta}M \leftarrow , \underline{\Delta}M; \rightarrow (2 = \rho \rho \underline{\Delta}M) / 2; \rightarrow (0 \in \rho \underline{\Delta}M) / 0$

[2] $\rightarrow L3; \rightarrow (2 = \bar{T}C \leftarrow, C) / L1; \rightarrow (C \in 9) / L1$

[3] $L1: F \leftarrow 1.2109 \times 11 \Delta GRF 2; 4 \Delta GRF 0 0$

[4] $E \leftarrow 11 \Delta GRF 1; I \leftarrow -1 + 5 II 4; II \leftarrow 14\bar{T}6$

[5] $R \leftarrow F[3] + (F[4] - F[3]) \times (\underline{\Delta}M[2;] - E[3]) \div E[4] - E[3]$

[6] $R \leftarrow R, [0.5] F[1] + (F[2] - F[1]) \times (\underline{\Delta}M[1;] - E[1]) \div E[2] - E[1]$

[7] $R \leftarrow 32 32\bar{T}0.5 + R$

[8] $R[2;1;] \leftarrow R[2;1;] + 64$

[9] $R[2;2;] \leftarrow R[2;2;] + 32$

[10] $E \leftarrow (\rho R \leftarrow \underline{ASCODE}[1+, 3 2 1 \rho R]) \div 4$

[11] $\rightarrow L2; R \leftarrow (2\bar{T}29 27), 'ABCDHIJKL'[C], R; \rightarrow (2 = \bar{T}C) / 1 + \text{I26}$

[12] $R \leftarrow, (2\bar{T}29), ((E, 4) \rho R), (E, 1 + \rho C) \rho (2\bar{T}31), C$

[13] $L2: (I \downarrow \rho R) \uparrow R; 2\bar{T}22$

[14] $\rightarrow L2 \times 10 \neq \rho R + I \downarrow R$

[15] $\rightarrow 0; 4 \Delta GRF ''$

[16] $L3: 2\bar{T}15 \rho 7 16 16$

∇

```

    VVS[□]V
    Q←L V S R;C;D;E
[1] →2+v/C←(Λ/C≠1ΦC+1,(E←ρL←,L),D←1+ρR←(-2↑1 1,ρR)ρR),(1<ρ
      ρL)v2<ρρR
[2] →0×ρQ←(((1↑ρR),D)ρR),[1](D←E[D])ρL
[3] ,(2 27ρ'ERREUR DE RANG DANS VS      ERREUR DE DIMENSION
      DANS VS')[ΦC]1;]
[4] Q←10
    V

```

(*) Pour la documentation des fonctions graphiques, se référer à Bonenfant (1977).

(*) For the explanation of the graphic functions, refer to Bonenfant (1977).

Appendice 3. Valeurs numériques de l'exemple
Appendix 3. Numerical values of the example

ORDER NUMBER	TOTAL VOLUME OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	AVERAGE AGE OF THE PLOT	DBH IN CM	MERCHANTABLE BASAL AREA PER HECTARE	NUMBER OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	TOTAL AVERAGE HEIGHT IN METRES
NUMERO D'ORDRE	VOLUME TOTAL DES TIGES MARCHANDES A L'HECTARE	AGE MOYEN DE LA PARCELLE	DHP EN CM	SURFACE TERRIERE MARCHANDE A L'HECTARE	NOMBRE DE TIGES MARCHANDES PAR HECTARE	HAUTEUR TOTALE MOYENNE EN METRES
1	165.555	51	18.0	28.916	1112	12.2
2	15.849	39	13.0	4.358	321	7.9
3	7.851	42	15.0	1.764	99	8.5
4	20.607	45	15.0	4.809	272	11.3
5	54.488	42	14.2	12.839	791	9.1
6	143.590	53	14.2	30.348	1853	14.0
7	251.152	51	20.6	36.777	1038	14.0
8	87.955	37	13.7	21.151	1557	8.2
9	53.410	44	14.2	12.086	667	9.8
10	190.689	50	15.7	38.435	1927	15.9
11	186.805	52	19.8	32.826	1235	15.6
12	184.867	50	17.8	31.758	1235	15.2
13	40.591	44	11.4	15.030	1433	9.1
14	20.019	34	15.5	3.570	173	6.4
15	5.738	44	12.2	1.500	124	11.6
16	183.720	42	13.5	42.313	2940	9.5
17	243.574	53	15.7	47.065	2422	13.4
18	105.148	47	12.2	28.005	2347	13.4
19	120.793	45	13.7	28.400	1878	12.5
20	43.243	39	11.9	12.963	1112	9.8
21	81.434	39	13.0	21.629	1631	10.1
22	166.884	46	14.0	36.547	2372	12.8
23	218.741	54	18.3	35.238	1334	17.4
24	83.274	64	12.7	22.717	1779	18.6
25	64.466	38	12.4	17.767	1433	9.1

ORDER NUMBER	TOTAL VOLUME OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	AVERAGE AGE OF THE PLOT	DBH IN CM	MERCHANTABLE BASAL AREA PER HECTARE	NUMBER OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	TOTAL AVERAGE HEIGHT IN METRES
NUMERO D'ORDRE	VOLUME TOTAL DES TIGES MARCHANDES A L'HECTARE	AGE MOYEN DE LA PARCELLE	DHP EN CM	SURFACE TERRIERE MARCHANDE A L'HECTARE	NOMBRE DE TIGES MARCHANDES PAR HECTARE	HAUTEUR TOTALE MOYENNE EN METRES
26	193.236	44	17.8	33.778	1310	11.0
27	85.066	47	11.9	25.682	2273	12.2
28	99.991	48	13.0	25.495	1878	11.9
29	136.306	45	17.3	25.153	1087	12.2
30	130.170	55	13.0	32.515	2446	14.0
31	209.470	50	16.0	40.052	2002	14.6
32	11.378	38	12.2	3.609	297	7.9
33	23.840	37	10.9	10.141	1063	8.5
34	53.564	36	10.9	22.045	2249	8.2
35	135.411	54	17.5	24.424	964	12.5
36	154.170	56	17.3	28.778	1260	15.2
37	199.386	55	17.8	35.747	1483	13.7
38	168.844	50	13.5	40.521	2743	14.6
39	21.573	38	10.7	9.957	1087	9.1
40	43.313	38	11.7	14.543	1310	7.0
41	74.185	45	12.2	21.289	1804	10.7
42	29.983	37	11.7	10.361	939	6.1
43	174.567	50	14.7	36.457	2174	14.9
44	201.493	49	19.3	34.295	1211	13.7
45	107.737	34	14.5	23.713	1458	7.3
46	258.702	51	17.0	46.345	2002	13.7
47	158.005	52	16.8	29.465	1384	14.0
48	142.513	44	12.2	37.610	3089	10.7
49	128.504	39	12.4	32.170	2520	8.5
50	114.335	39	13.0	27.754	2076	10.1

ORDER NUMBER	TOTAL VOLUME OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	AVERAGE AGE OF THE PLOT	DBH IN CM	MERCHANTABLE BASAL AREA PER HECTARE	NUMBER OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	TOTAL AVERAGE HEIGHT IN METRES
NUMERO D'ORDRE	VOLUME TOTAL DES TIGES MARCHANDES A L'HECTARE	AGE MOYEN DE LA PARCELLE	DHP EN CM	SURFACE TERRIERE MARCHANDE A L'HECTARE	NOMBRE DE TIGES MARCHANDES PAR HECTARE	HAUTEUR TOTALE MOYENNE EN METRES
51	125.636	41	12.4	33.499	2792	9.8
52	124.992	48	15.7	25.555	1334	11.9
53	169.340	46	15.2	33.442	1779	12.2
54	145.767	46	15.2	29.173	1557	10.1
55	247.150	56	14.5	52.532	3163	14.6
56	114.496	51	15.2	22.853	1186	12.8
57	118.687	46	12.4	30.597	2446	10.7
58	235.933	61	16.3	42.226	2051	17.7
59	177.387	57	14.0	39.054	2545	14.6
60	58.343	48	12.4	16.201	1310	10.7
61	17.605	42	11.7	5.801	519	9.5
62	114.797	46	13.2	28.389	2174	10.7
63	3.862	42	12.7	0.961	74	7.3
64	98.486	50	13.5	23.789	1680	12.8
65	26.114	45	11.9	8.600	766	9.5
66	139.000	56	18.8	21.981	791	17.4
67	9.145	35	11.4	4.549	519	6.4
68	67.887	48	12.2	18.717	1557	9.8
69	178.934	60	14.5	38.500	2422	17.1
70	127.840	52	15.2	26.468	1458	11.9
71	188.506	50	14.0	43.406	2792	15.2
72	1.994	42	10.9	0.711	74	7.6
73	60.603	48	18.3	11.003	395	14.6
74	63.094	51	13.2	16.475	1161	11.3
75	125.761	51	14.0	28.479	1804	12.5

ORDER NUMBER	TOTAL VOLUME OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	AVERAGE AGE OF THE PLOT	DBH IN CM	MERCHANTABLE VASAL AREA PER HECTARE	NUMBER OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	TOTAL AVERAGE HEIGHT IN METRES
NUMERO D'ORDRE	VOLUME TOTAL DES TIGES MARCHANDES A L'HECTARE	AGE MOYEN DE LA PARCELLE	DHP EN CM	SURFACE TERRIERE MARCHANDE A L'HECTARE	NOMBRE DE TIGES MARCHANDES PAR HECTARE	HAUTEUR TOTALE MOYENNE EN METRES
76	60.827	40	13.2	16.082	1137	9.1
77	28.346	46	12.2	8.597	717	10.1
78	74.465	48	14.7	17.590	1063	13.7
79	79.454	45	13.2	20.700	1458	10.7
80	48.827	37	13.7	11.893	741	8.5
81	86.276	52	14.7	19.633	1137	12.8
82	25.246	52	15.0	5.262	297	13.1
83	1.819	34	9.9	1.000	124	6.7
84	142.394	46	17.5	24.164	964	11.3
85	112.285	50	15.0	27.174	1853	10.7
86	162.462	62	17.8	26.871	1186	17.7
87	20.502	42	11.2	7.560	766	9.1
88	27.359	39	11.9	8.303	717	8.8
89	2.190	42	12.7	0.626	49	10.1
90	18.753	39	12.2	5.520	469	10.1
91	122.788	47	14.7	25.613	1532	13.7
92	76.662	55	21.6	12.931	346	15.6
93	15.940	47	13.2	4.476	321	9.8
94	104.931	46	16.3	21.595	1087	11.0
95	53.004	50	14.7	11.578	642	11.0
96	2.554	39	11.9	0.851	74	8.2
97	66.915	57	17.0	12.944	618	17.1
98	38.485	44	12.7	10.670	840	10.7
99	73.492	52	14.2	17.533	1137	11.9
100	58.427	45	17.3	11.148	544	11.6

ORDER NUMBER	TOTAL VOLUME OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	AVERAGE AGE OF THE PLOT	DBH IN CM	MERCHANTABLE BASAL AREA PER HECTARE	NUMBER OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	TOTAL AVERAGE HEIGHT IN METRES
NUMERO D'ORDRE	VOLUME TOTAL DES TIGES MARCHANDES A L'HECTARE	AGE MOYEN DE LA PARCELLE	DHP EN CM	SURFACE TERRIERE MARCHANDE A L'HECTARE	NOMBRE DE TIGES MARCHANDES PAR HECTARE	HAUTEUR TOTALE MOYENNE EN METRES
101	71.568	48	15.2	15.718	890	9.8
102	2.344	37	11.4	0.826	74	8.5
103	77.921	56	20.1	13.331	395	18.0
104	79.195	46	15.2	15.212	815	10.1
105	13.792	57	12.4	3.484	272	14.3
106	24.910	51	16.8	4.464	198	13.1
107	37.225	53	25.7	5.216	99	16.5
108	161.440	53	15.2	31.761	1878	15.6
109	29.808	46	15.7	6.748	346	10.7
110	33.524	43	12.2	11.263	988	8.2
111	118.449	56	14.2	24.964	1557	14.3
112	156.668	47	14.7	31.558	1804	14.0
113	31.705	45	16.5	6.369	297	11.9
114	68.713	46	11.7	20.228	1853	10.4
115	70.168	44	13.7	16.857	1137	10.7
116	50.800	45	13.5	13.745	1063	12.2
117	187.323	55	16.8	31.873	1433	17.7
118	40.024	48	13.0	10.483	791	11.0
119	138.426	48	13.0	32.515	2372	14.0
120	63.157	46	16.3	12.066	519	13.1
121	127.805	51	13.5	27.945	1927	12.2
122	54.089	39	11.7	17.266	1581	9.1
123	130.485	57	25.9	17.151	321	17.1
124	82.658	44	13.7	19.051	1285	9.5
125	44.293	46	13.0	11.997	890	9.1

ORDER NUMBER	TOTAL VOLUME OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	AVERAGE OF THE PLOT	DBH IN CM	MERCHANTABLE BASAL AREA PER HECTARE	NUMBER OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	TOTAL AVERAGE HEIGHT IN METRES
NUMERO D'ORDRE	VOLUME TOTAL DES TIGES MARCHANDES A L'HECTARE	AGE MOYEN DE LA PARCELLE	DHP EN CM	SURFACE TERRIERE MARCHANDE A L'HECTARE	NOMBRE DE TIGES MARCHANDES PAR HECTARE	HAUTEUR TOTALE MOYENNE EN METRES
126	117.274	51	14.2	26.873	1631	11.6
127	102.685	44	15.2	21.990	1186	12.5
128	81.098	43	15.5	17.740	1038	11.3
129	119.779	59	13.7	24.999	1680	14.9
130	86.038	47	14.5	16.479	988	12.2
131	136.166	57	16.5	23.948	1235	17.4
132	176.925	61	15.5	29.240	1507	19.8
133	107.548	48	14.2	25.024	1581	9.8
134	130.995	49	14.5	28.925	1754	10.7
135	154.723	59	15.7	31.975	1631	15.2
136	162.252	53	19.3	30.496	1038	15.9
137	197.077	47	19.8	35.123	1137	10.4
138	134.816	43	15.5	26.503	1359	9.1
139	108.569	45	13.5	27.473	1927	12.5
140	117.834	48	15.5	24.516	1260	10.4
141	130.394	61	16.5	24.840	1112	16.2
142	59.379	48	12.2	16.477	1359	11.0
143	49.037	47	11.2	16.652	1656	10.7
144	50.065	44	12.7	13.092	1013	11.0
145	35.847	45	12.4	9.366	717	10.1
146	122.529	47	16.3	23.087	988	13.7
147	127.469	56	16.0	25.719	1310	18.0
148	214.962	57	18.8	36.874	1260	14.0
149	167.150	51	15.0	33.182	1705	14.6
150	94.890	50	16.0	18.356	840	12.5

ORDER NUMBER	TOTAL VOLUME OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	AVERAGE AGE OF THE PLOT	DBH IN CM	MERCHANTABLE BASAL AREA PER HECTARE	NUMBER OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	TOTAL AVERAGE HEIGHT IN METRES
NUMERO D'ORDRE	VOLUME TOTAL DES TIGES MARCHANDES A L'HECTARE	AGE MOYEN DE LA PARCELLE	DHP EN CM	SURFACE TERRIERE MARCHANDE A L'HECTARE	NOMBRE DE TIGES MARCHANDES PAR HECTARE	HAUTEUR TOTALE MOYENNE EN METRES
151	88.977	54	17.8	16.217	618	13.7
152	157.368	55	15.2	31.301	1557	13.7
153	57.070	52	14.5	12.218	717	15.2
154	129.484	44	13.2	31.586	2273	11.0
155	160.811	47	16.0	31.137	1507	12.5
156	115.462	45	12.7	30.176	2323	11.0
157	125.118	46	12.4	34.902	2891	11.0
158	149.202	44	16.5	28.964	1359	11.9
159	163.959	50	15.0	34.196	1853	12.8
160	92.909	44	14.7	19.987	1161	11.3
161	44.768	47	16.0	9.000	445	11.9
162	180.165	43	14.5	39.302	2372	9.8
163	99.746	45	13.2	24.304	1705	10.4
164	126.790	48	13.7	29.037	1927	11.6
165	40.738	49	13.7	9.750	667	10.7
166	60.001	48	13.2	14.639	1038	12.8
167	184.916	57	15.2	38.504	2076	14.3
168	191.983	55	17.5	35.659	1458	14.9
169	91.594	50	13.7	20.624	1285	15.9
170	239.166	64	20.6	40.928	1285	21.7
171	60.876	41	12.2	16.422	1334	11.0
172	56.587	42	13.7	13.611	890	8.2
173	164.561	54	14.5	35.625	2125	16.5
174	136.383	51	14.0	30.360	1927	11.9
175	188.898	45	14.7	39.882	2249	11.9

ORDER NUMBER	TOTAL VOLUME OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	AVERAGE AGE OF THE PLOT	DBH IN CM	MERCHANTABLE BASAL AREA PER HECTARE	NUMBER OF MERCHANTABLE BOLES PER HECTARE	TOTAL AVERAGE HEIGHT IN METRES
NUMERO D'ORDRE	VOLUME TOTAL DES TIGES MARCHANDES A L'HECTARE	AGE MOYEN DE LA PARCELLE	DHP EN CM	SURFACE TERRIERE MARCHANDE A L'HECTARE	NOMBRE DE TIGES MARCHANDES PAR HECTARE	HAUTEUR TOTALE MOYENNE EN METRES
176	58.084	56	14.5	12.622	741	14.3
177	25.512	43	13.2	6.242	445	10.7
178	36.323	49	14.7	7.935	469	14.3
179	121.563	53	18.3	21.866	815	14.3
180	167.885	63	13.7	39.203	2619	17.4
181	217.355	54	14.2	48.047	2916	18.0
182	183.244	50	14.7	38.852	2174	11.3
183	135.768	55	14.7	29.146	1680	14.9
184	87.186	51	17.5	15.881	618	14.9
185	176.645	53	15.7	35.641	1804	14.6
186	192.200	59	16.3	37.083	1705	14.9
187	207.482	53	16.0	40.830	2002	14.3
188	2.519	44	12.7	0.649	49	8.5
189	61.352	54	15.2	12.436	642	14.3
190	40.801	49	11.4	13.340	1285	11.0
191	20.369	65	17.3	3.744	148	22.0
192	156.353	58	17.0	29.465	1260	15.2
193	107.275	58	19.0	18.954	667	17.1
194	126.062	64	18.3	22.770	865	19.2
195	114.524	49	16.8	21.574	964	11.9
196	96.961	54	15.5	20.111	1087	14.6
197	68.468	52	14.2	13.979	741	16.8
198	65.046	57	14.2	15.221	1013	14.6
199	31.942	48	16.8	6.794	304	12.2
200	156.738	54	14.5	36.542	2221	14.6

